Método Axiomático e Teorias Formais

#13

Predicado de Suppes

Fundamentos Conjuntistas do Método Axiomático

A axiomatização de teorias científicas empíricas, envolve, em geral, considerar um complexo aparato matemático, tal como conjuntos, funções e números reais, o que tornaria essa axiomatização uma árdua tarefa.

Uma ideia proposta pelo filósofo Patrick Suppes seria aproveitar tudo o que se sabe sobre uma teoria de conjuntos.

Patrick Suppes (1922-2014)

Fundamentos Conjuntistas do Método Axiomático

Intuitivamente, o que se está fazendo nesse processo é concentrar a atenção nos aspectos próprios da teoria a ser criada e tomar a matemática que serve de fundamento a tal teoria como pressuposta.

Segundo Suppes, "*axiomatizar uma teoria é definir um predicado em termos de noções da teoria de conjuntos*".

Patrick Suppes (1922-2014)

Fundamentos Conjuntistas do Método Axiomático

Em geral, uma teoria matemática ou empírica pode ser axiomatizada tomando-se como "estrutura-base"

- um aparato lógico, dado, por exemplo, pelo cálculo de predicados de primeira ordem com igualdade juntamente com
- um aparato matemático, dado, por exemplo, por uma teoria de conjuntos, como a teoria de Zermelo-Fraenkel com axioma da escolha (ZFC) ou a teoria intuitiva.

Predicado de Suppes

A axiomatização de uma teoria tomando-se como estrutura-base uma teoria de conjuntos consiste basicamente em definir-se um predicado em termos de noções da teoria de conjuntos. Tal predicado é denominado, portanto, de *predicado conjuntista*.

Dizendo de outro modo: um predicado conjuntista, usado para definir uma teoria, é um predicado definido na linguagem (portanto, uma fórmula) de alguma teoria de conjuntos.

Nessa apresentação, os predicados conjuntistas serão denominados também como predicados de Suppes, embora a noção dada por Suppes é bem mais técnica do que a que daremos aqui.

Predicado de Suppes

Dada uma teoria de conjuntos $\mathcal{C}$, um predicado de Suppes para uma teoria é um predicado $\mathbf{P}$, com uma única variável livre, que se aplica a um dado conjunto G de $\mathcal{C}$ definido da seguinte forma:

$$\mathbf{P}(G) \leftrightarrow (\exists x_1)(\exists x_2) \ldots (\exists x_n)(G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \,\&\, A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \&\, A_k),$$

em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são termos de $\mathcal{C}$
e $A_1, A_2, \ldots A_k$ são axiomas que descrevem as propriedades de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Exemplo 1: Teoria de Grupos

A teoria matemática de grupos pode ser axiomatizada por meio do predicado conjuntista $\mathbf{G}(G)$, que significa "G é um grupo", da seguinte forma:

$\mathbf{G}(G) \leftrightarrow (\exists H)(\exists *)(\exists e)(G = \langle H, *, e\rangle \,\&A_1\& \ldots \&A_6)$ em que

- A_1: H é um conjunto não vazio;
- A_2: $*$ é uma função de $H \times H$ em H;
- A_3: $e \in H$;
- A_4: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((x \in H \,\&\, y \in H \,\&\, z \in H) \rightarrow (x * (y * z) = (x * y) * z)\big)$
- A_5: $(\forall x)(x \in H \rightarrow e * x = x)$
- A_6: $(\forall x)(\exists y)(y \in H \,\&\, y * x = e)$

Exemplo 2: Espaços Métricos

$\mathbf{M}(G)$ significa "G é um espaço métrico":

$\mathbf{M}(G) \leftrightarrow (\exists X)(\exists d)(G = \langle X, d\rangle \,\&A_1\& \ldots \&A_6)$ em que

- A_1: X é um conjunto não vazio;
- A_2: d é uma função de $X \times X$ em $\mathbb{R}$;
- A_3: $(\forall x)(\forall y)(x \in X \,\&y \in X) \rightarrow (d(x, y) \geq 0)$
- A_4: $(\forall x)(\forall y)(x \in X \,\&\, y \in X) \rightarrow (d(x, y) = 0 \;\leftrightarrow x = y)$
- A_5: $(\forall x)(\forall y)(x \in X \,\&\, y \in X) \rightarrow \big(d(x, y) = d(y, x)\big)$
- A_6: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in X \,\&\, y \in X \,\&\, z \in X) \rightarrow \big(d(x, y) \leq d(x, z) +$

Exemplo 2: Espaços Métricos

Algumas interpretações para nosso predicado para espaços métricos :

- $X = \mathbb{R}.$
- $d(x, y) = |x - y|$

- $X = \{f : f \text{ é uma função contínua definida em } [a, b] \subseteq \mathbb{R}\}$
- $d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$

Para obtermos espaços métricos (modelos do predicado $\mathbf{M}$), teríamos, é claro, que verificar que os axiomas de espaço métrico são satisfeitos.

Número Imaginário

numeroimaginario.com.br